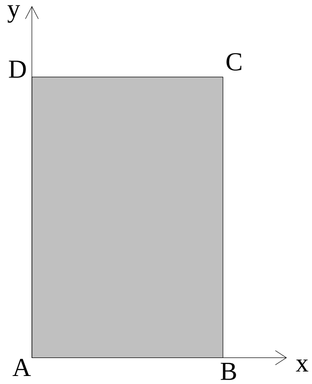
---

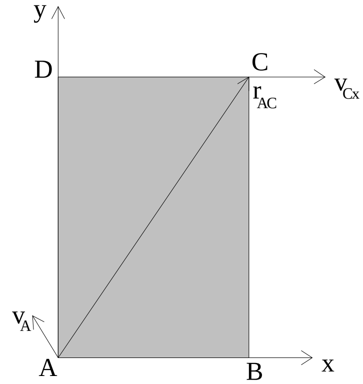
1. Pravokutna ploča ABCD dimenzija $|\overline{AB}| = 3$ [m], $|\overline{BC}| = 4$ [m], giba se u ravnini XY.
U promatranom trenutku ploča se nalazi u prikazanom položaju i poznati su podaci:

$\vec{v}_A = -4\cdot\vec{i} + 6\cdot\vec{j}$ **[m /s],** $v_{Cx} = 12$ **[m /s],** $\vec{a}_A = \vec{0}$ **[m /s^2],** $\vec{\varepsilon} = -1\cdot\vec{k}$ **[rad/s^2].**

Treba odrediti:

a) vektor kutne brzine ploče
b) vektor i veličinu brzine i ubrzanja točke C
c) položaj trenutnog centra brzine (koordinate)





Računsko rješenje

a) brzine:

Zadan je vektor brzine točke A, i x koordinata vektora brzine točke C:

$$\vec{v}_A = -4\cdot\vec{i} + 6\cdot\vec{j} \qquad v_{Cx} = 12$$

Gibanje točke C određeno je vektorskim zbrojem doprinosa od translacije točke A i rotacije točke C oko A

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = (v_{Ax} + v_{CA\,x})\cdot\vec{i} + (v_{Ay} + v_{CA\,y})\cdot\vec{j} = v_{Cx}\cdot\vec{i} + v_{Cy}\cdot\vec{j}$$

- brzina točke C oko točke A $\vec{v}_{C/A}$ jednaka je vektorskom umnošku vektora kutne brzine i vektora sa početkom u točki A i završetkom u točki C ($\vec{r}_{CA} = 3\cdot\vec{i} + 4\cdot\vec{j}$)m.

$$\vec{v}_{CA} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot\omega\cdot\vec{i} + 3\cdot\omega\cdot\vec{j} = v_{CA\,x}\cdot\vec{i} + v_{CA\,y}\cdot\vec{j}\,, \qquad v_{CA\,x} = -4\cdot\omega\,; \qquad v_{CA\,y} = 3\cdot\omega$$

iz vektorske jednadžbe $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = (v_{Ax} + v_{CA\,x})\cdot\vec{i} + (v_{Ay} + v_{CA\,y})\cdot\vec{j} = v_{Cx}\cdot\vec{i} + v_{Cy}\cdot\vec{j}$ dobijeamo sustav

linearnih jednadžbi: $v_{Ax} + v_{CA\,x} = v_{Cx} \quad\Rightarrow\quad -4 - 4\cdot\omega = 12 \quad\Rightarrow\quad \omega = -4$ rad /s $\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\vec{\omega} = -4\cdot\vec{k}}$

$$v_{Ay} + v_{CA\,y} = v_{Cy} \quad\Rightarrow\quad 6 + 3\cdot\omega = v_{Cy} \quad\Rightarrow\quad v_{Cy} = 6 - 3\cdot 4 = 6 - 12 = -6 \text{ m/s}$$

$$\boldsymbol{\vec{v}_C = v_{Cx}\cdot\vec{i} + v_{Cy}\cdot\vec{j} = 12\cdot\vec{i} - 6\cdot\vec{j}} \qquad \boldsymbol{v_C = |\vec{v}_C| = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = 13.416} \text{ m/s}$$

---

b) ubrzanja:

Zadano je ubrzanje točke A ($\vec{a}_A = \vec{0}$) te smjer i veličina kutnog ubrzanja $\vec{\varepsilon} = -1 \cdot \vec{k}$.

Ubrzanje točke C jednako je vektorskom zbroju ubrzanja točke A, i ubrzanja od rotacije točke C oko točke A (zbroj vektora normalne i tangencijalne komponente ubrzanja točke C oko točke A):

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{CA} + \vec{a}^t_{CA} = \left(a_{Ax} + a^n_{CA\,x} + a^t_{CA\,x}\right)\cdot \vec{i} + \left(a_{Ay} + a^n_{CA\,y} + a^t_{CA\,y}\right)\cdot \vec{j} = a_{Cx} \cdot \vec{i} + a_{Cy} \cdot \vec{j}$$

Vektor normalne komponente ubrzanja točke C oko točke A je:

$$\vec{a}^n_{CA} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CA}\right) = \vec{\omega} \times \vec{v}_{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -4 \\ 16 & -12 & 0 \end{vmatrix} = -48 \cdot \vec{i} - 64 \cdot \vec{j} = a^n_{CA\,x} \cdot \vec{i} + a^n_{CA\,y} \cdot \vec{j}$$

$$a^n_{CA\,x} = -48 \ \ \text{ms}^{-2} \qquad a^n_{CA\,y} = -64 \ \ \text{ms}^{-2}$$

Vektor tangencijalne komponente ubrzanja točke C oko točke A, jednak je vektorskom produktu vektora kutnog ubrzanja i vektora udaljenosti od točke A do točke C (sa početkom u točki A i vrhom u točki C)

$$\vec{a}^t_{CA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{CA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j} = a^t_{CA\,x} \cdot \vec{i} + a^t_{CA\,y} \cdot \vec{j}\ , \qquad a^t_{CA\,x} = 4 \ \ \text{ms}^{-2} \quad a^t_{CA\,y} = -3 \ \ \text{ms}^{-2}$$

$$\vec{a}_C = \left(a_{Ax} + a^n_{C/A\,x} + a^t_{C/A\,x}\right)\cdot \vec{i} + \left(a_{Ay} + a^n_{C/A\,y} + a^t_{C/A\,y}\right)\cdot \vec{j} \quad \boldsymbol{\vec{a}_C = -44 \cdot \vec{i} - 67 \cdot \vec{j}}$$

$$\vec{a}_C = \left(0 - 48 + 4\right)\cdot \vec{i} + \left(0 - 64 - 3\right)\cdot \vec{j} = -44 \cdot \vec{i} - 67 \cdot \vec{j}\ , \qquad \boldsymbol{a_C = \left|\vec{a}_C\right| = \sqrt{a^2_{Cx} + a^2_{Cy}} = 80.156\ \ \text{ms}^{-2}}$$

c) položaj trenutnog centra brzina (točka P)

Trenutni centar brzina ima brzinu $v_P=0$. Ako u točki P odaberemo ishodište pokretnog sustava, brzina točke A posljedica je rotacije točke A oko točke P:

$$:\vec{v}_A = -4\vec{i} + 6\vec{j} = \vec{v}_{AP} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ (x_A - x_P) & (y_A - y_P) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -4 \\ -x_P & -y_P & 0 \end{vmatrix} = -4y_P\vec{i} + 4x_P\vec{j}$$

Vektorsku jednadžbu zamjenjujemo sa dvije skalarne jednadžbe iz kojih odredimo koordinate centra brzina:

$$\begin{aligned} &\vec{i} \,..... \ -4 = -4y_P && \Rightarrow \quad y_P = 1{,}0 \\ &\vec{j} \,..... \ \ 6 = 4x_P && \Rightarrow \quad x_P = 1{,}5 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{P[1,5m ;1,0m]}$$

Drugi način:
Položaj trenutnog centra brzine (točka P) možemo odrediti iz uvjeta da pravac vektora brzine svake točke ploče mora biti okomit na spojnicu promatrane točke s trenutnim centrom brzine. Računska formulacija:

$p_{vA} \cdots y - y_A = \frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} \cdot (x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-3}{2} \cdot x$ (pravac brzine točke A)

$p_{vC} \cdots y - y_C = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} \cdot (x - x_C) \qquad y = \frac{-1}{2} \cdot x + \frac{11}{2}$ (pravac brzine točke C)

$p'_{vA} \cdots y - y_A = -\frac{v_{Ax}}{v_{Ay}} \cdot (x - x_A) \qquad y = \frac{2}{3} \cdot x$ (pravac okomit na pravac brzine točke A)

$p'_{vC} \cdots y - y_C = -\frac{v_{Cx}}{v_{Cy}} \cdot (x - x_C) \qquad y = 2 \cdot x - 2$ (pravac okomit na pravac brzine točke C)

Položaj trenutnog pola brzine je u sjecištu pravaca p'_{vA} i p'_{vC}

$y = \frac{2}{3} \cdot x = 2 \cdot x - 2 \quad \Rightarrow \quad x = 1.5$ m $\quad y = 1$ m $\quad \Rightarrow$ **P (1.5, 1.0)**

Grafičko rješenje:

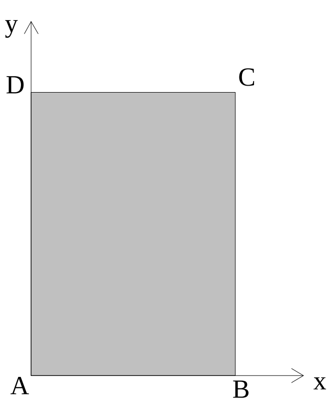
a) brzine:

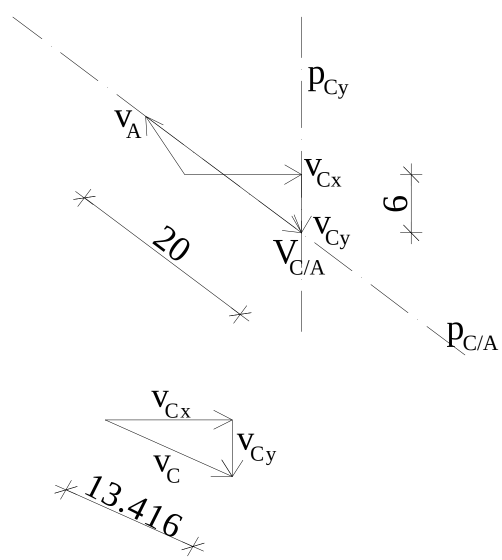
- rješavamo vektorsku jednadžbu $\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{CA} = v_{Cx} \cdot \vec{i} + v_{Cy} \cdot \vec{j}$
- Zadani su: vektor brzine točke A i x koordonata vektora brzine točke C. Znamo da y koordinate vektora brzine točke C, mora biti paralelna sa osi y: pravac P_{Cy}
- Vektor brzine rotacije točke C oko točke A mora biti okomit na vektor koji ima početak u točku A i vrh u točki C: $\vec{r}_{AC} = 3 \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}$, jer je $\vec{v}_{C/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC}$

Iz plana brzina (vektorskog poligona nacrtanog u odabranom mjerilu) odredimo sjecište pravaca p_{Cy} i $p_{C/A}$ te očitamo brzine v_{Cy} i $v_{C/A}$. Iz zadane x koordinate i očitane y koordinate, konstruiramo vektor brzine v_C.

Mjerilo duljina: npr. 1cm=1m

Mjerilo brzina: npr. 1cm=10m/s





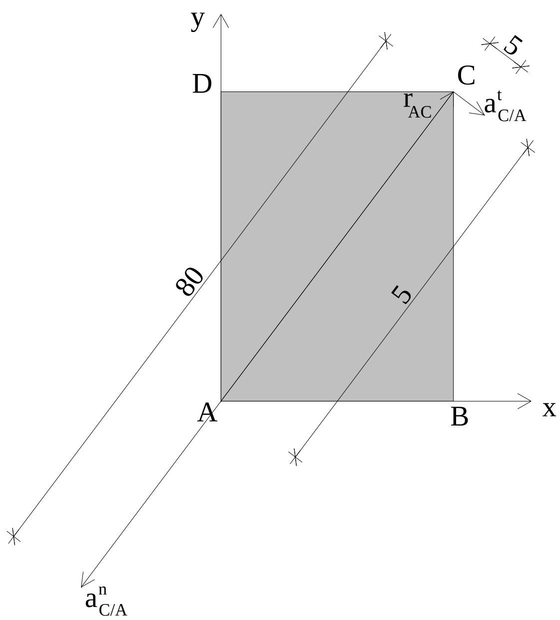
b) ubrzanja:

Zadan je vektor ubrzanja točke A i vektor kutnog ubrzanja ploče ε.

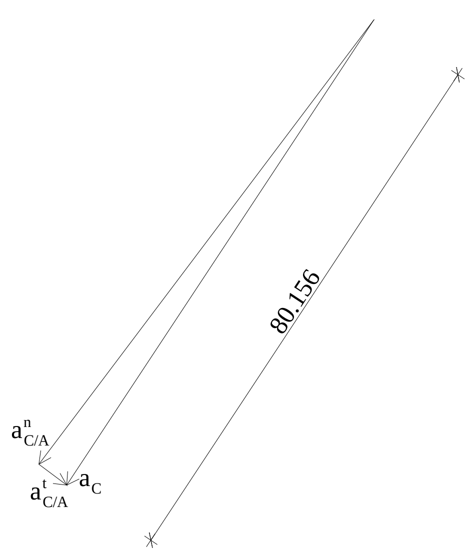
Ubrzanje točke C jednako je zbroju vektora normalne i tangencijalne komponente ubrzanja od rotacije točke C oko točke A jer je točka A trenutni centar ubrzanja (ubrzanje pokretnog ishodišta $\vec{a}_A = \vec{0}$).

Normalna komponenta ubrzanja od rotacije točke C oko točke A, ima veličinu $a^n_{CA} = \omega^2 \cdot r_{CA} = 16 \cdot 5 = 80$ m/s^2 i ima smjer suprotan vektoru $\vec{r}_{CA}$.

Tangencijalna komponenta ubrzanja od rotacije točke C oko točke A, ima veličinu $a^t_{C/A} = \varepsilon \cdot r_{AC} = 1 \cdot 5 = 5$ m/s^2, okomita je na vektor $\vec{r}_{CA}$, i usmjerena prema pravilu desne ruke (u smjeru rotacije vektora ε).



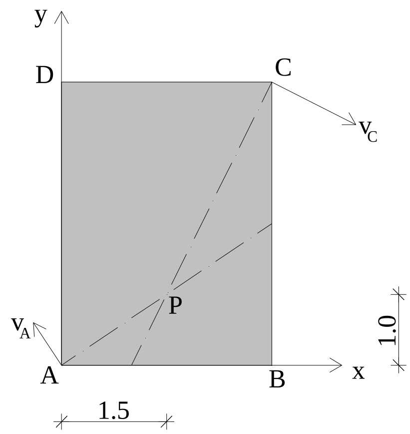
Vektorski zbroj normalne i tangencijalne komponente ubrzanja $a_{C/A}$ odnosno ubrzanje od rotacije točke C oko točke A (koji je ujedno i ukupno ubrzanje točke C) odredimo očitavanjem iz crteža (plana ubrzanja) u mjerilu koje je odabrano za crtanje poznatih vektora.



Mjerilo: -------

c) položaj trenutnog centra brzina (točka P)

Položaj trenutnog centra brzine (točka P) odredimo konstrukcijom iz uvjeta da pravac brzine točke mora biti okomit na spojnicu te točke s trenutnim centrom brzine. Centar brzina je točka P u sjecištu okomica na dva poznata vektora brzina. Koordinate točke očitamo u skladu sa odabranim mjerilom crteža..



Mjerilo: ------

Rješenje

a) $\vec{\omega} = -4 \cdot \vec{k}$

b) $\vec{v}_C = 12 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}$ $\quad v_C = 13.416$ m/s

$\vec{a}_C = -44 \cdot \vec{i} - 67 \cdot \vec{j}$ $\quad a_C = 80.156$ m/s^2

c) **P (1.5, 1.0)m**